Igor Jelaska

ASPEKTI PRIMJENE MATEMATIČKOG MODELIRANJA I DINAMIČKIH SUSTAVA U KINEZIOLOGIJI

1. UVOD

Proces znanstvenog raščlanjivanja, naročito u kineziologiji, nužno zahtijeva apstraktne modele koji su istovremeno stohastički i algebarski (Jelaska, 2011). Navedeni modeli nastaju iz napora da se formaliziraju zakonitosti promatranog kineziološkog sustava čime se omogućava precizno kvantitativno i kvalitativno predviđanje. Izuzetno je važno naglasiti da se upotrebom novih metodoloških alata i modela, naročito dinamičkih sustava mogu nadići postojeća ograničenja standardno korištenih kvantitativnih analiza (Hughes i Bartlett, 2002; McGarry i sur., 2002). Nadalje, pod pojmom apstraktnog matematičkog modela u znanstvenom istraživanju u općenitosti, a tako i u kineziologiji, podrazumijeva se skup matematičkih objekata i precizno opisanih relacija među njima, koji apstraktno reproduciraju pojedine realno postojeće uzročno-posljedične veze te njihove učinke. Preciznije, model se sastoji od strogo matematičke formalizacije promatranih transformacija koje se mogu izraziti pomoću sheme. Nadalje, potrebno je istaknuti da se u znanstvenim istraživanjima u kineziologiji ista realnost može modelirati bitno različitim modelima a njihova upotrebljivost ovisi o nivou preciznosti kojom se reproduciraju one uzročno-posljedične veze koje su značajne obzirom na svrhu modeliranja. Potrebno je istaknuti da je u znanstvenim problemima u društvenim znanostima znanosti čest slučaj da su pojedini dinamički sustavi samo jedna komponenta cjeline opisane većim dinamičkim sustavom. Navedena činjenica naročito vrijedi za istraživane probleme kineziološke znanosti koja je u svom utemeljenju rigorozno interdisciplinarna (Hamill i sur. 1999). Nadalje je važno naglasiti da je po definiciji, početno stanje dinamičkog sustava ono stanje u kojemu je sustav zatečen u trenutku u kojem počinjemo promatrati njegove promjene ulaza i izlaza (Ott, 1993; Barton, 1994). To stoga jer je pronalaženje početnog stanja sustava kompleksan problem u raznim granama primijenjenih društvenih znanosti zbog njegovog često vrlo značajnog utjecaja na izlaz sustava (Bertalanffy, 1968) dok autori (Birkhoff, 1966; Barton, 1994) ističu posebnu osjetljivost dinamičkog sustava na početne uvjete.

2. SMJERNICE KONSTRUKCIJE MODELA DINAMIČKOG SUSTAVA

U znanstvenoj kineziološkoj praksi, tijekom konstrukcije modela u pravilu kompleksne kineziološke realnosti, nužno je prihvaćanje različitih pretpostavki kao i aproksimacija koje utječu na područje valjanosti modela i točnost modela (Jelaska, 2011). Pretpostavke specificiraju uvjete pod kojima matematički model striktno odražava svojstva formalno modelirane uzročno-posljedične veze, dok su aproksimacije često nužna pojednostavljenja koja se pri izvođenju modela implementiraju sa svrhom da model na željenoj razini signifikantnosti bude što jednostavniji i pogodniji za korištenje. Naglašavamo da su u društvenim znanostima, naročito u kineziologiji u području analize polistrukturalnih i kompleksnih sportskih aktivnosti aproksimacije analiziranog sustava nužne obzirom na to da promatrani sustavi često imaju svojstva determinističkog kaosa što onemogućuje potpuno poznavanje pojedinosti modelirane uzročno-posljedične veze (Hughes i Bartlett, 2002; Jelaska, 2011). Navedeno u većoj ili manjoj mjeri idealizira promatrani sustav pa se može reći da izvedeni matematički model egzaktno reproducira uzročno-posljedične veze u nekom idealiziranom „svijetu“. Nadalje, varijable koje neposredno ili posredno ovise o stanju sustava, a značajne su s obzirom na svrhu modeliranja nazivaju se izlazim funkcijama (varijablama) odnosno izlazima modeliranog sustava. S druge strane, varijable koje svojim djelovanjem na sustav generiraju promjene njegova stanja a time i promjene izlaza nazivaju se ulazim funkcijama (varijablama) odnosno ulazima sustava. Broj ulaza i izlaza ovisi o prirodi promatranog sustava kao i o njegovoj ulozi kao komponente nekog složenijeg sustava, ali i o samim ciljevima odnosno hipotezama njegovog modeliranja. Od matematičkog modela koji formalizira odnose u nekom dinamičkom sustavu u kineziološkim istraživanjima često se očekuje da u nekom obliku generira jednoznačnu i dovoljno točnu informaciju o izlaznim funkcijama $i_1(t)$, $i_2(t)$,...,$i_r(t)$ u ovisnosti zadanim ulaznim funkcijama $u_1(t)$, $u_2(t)$,...,$u_p(t)$ (Jelaska, 2011).

S aspekta praktične primjene kažemo da je sustav dinamički ako uzročno-posljedične veze između uzroka i posljedica unutar sustava sadrže spremnike u kojima se u nestacionarnim uvjetima odvijaju procesi akumulacije (Ott, 1993). Tako primjerice, u fizikalnim dinamičkim sustavima spremnike predstavljaju dijelovi prostora u kojima se akumuliraju varijable za koje vrijedi temeljni zakon fizike - zakon sačuvanja. Pritom je stanje dinamičkog sustava u svakom vremenskom trenutku određeno stupnjem ispunjenosti svih njegovih spremnika varijablama koje se u njima akumuliraju.

U znanstvenoj i stručnoj praksi u kineziologiji do matematičkog se modela nekog dinamičkog sustava može doći na dva načelno različita načina. Prvi način je generirati funkcije po kojima se tijekom vremena mijenjaju ulazi i izlazi sustava odnosno postupcima eksperimentalne identifikacije. Primjena metoda eksperimentalne identifikacije nije uvjetovana poznavanjem prirode uzročno-posljedičnih veza unutar sustava, ali promjene ulaznih i izlaznih varijabli tijekom vremena moraju biti dostupne mjerenju. Nadalje, funkcije po kojima se mijenjaju ulazne varijable sustava moraju imati određena svojstva koja ovise o dinamičkim svojstvima sustava i o željenom području validnosti modela (Bertalanffy, 1968). Tako primjerice u kineziologiji čest je zahtjev da promatrane slučajne varijable imaju normalne distribucije ili da zadovoljavaju uvjet homoskedastičnosti. Drugi način konstrukcije je primjena prikladnih matematičkih formalizacija uzročno-posljedičnih odnosa iz kojih matematičko-logičkim analizama proizlazi ovisnost izlaznih varijabli o ulaznim varijablama. Pritom je važno istaknuti da su navedene metode klasični postupci matematičkog modeliranja u znanstvenoj praksi u društvenim znanostima. S druge strane, za praktičnu primjenu navedenih metodoloških mehanizama u društvenim znanostima čestoj je nužno ekspertno dobro poznavati relevantne uzročno-posljedične veze unutar samog sustava da bismo ih mogli matematički formulirati s točnošću koja je primjerena svrsi modela.

3. SMJERNICE KORIŠTENJA MATEMATIČKOG MODELIRANJA U KINEZIOLOGIJI

Modeli dinamičkih sustava koriste se za ispitivanje ili predviđanje općih i specijalnih situacija u sustavima za projektiranje složenih sustava upravljanja kao i za istraživanje unutarnjeg vladanja složenih procesa i sustava. Pritom su najčešće korišteni oblici prikaza matematičkog modela diferencijalne jednadžbe, jednadžbe diferencija, prikaz u prostoru stanja, prijenosne funkcije i prijenosne matrice. Pritom je glavni cilj modeliranja u kineziološkoj praksi da se na temelju združenih skupova podataka ili mjernih rezultata vremenskih tijekova ulaznih i izlaznih signala dinamičkog procesa pronađe i objasni struktura i parametri odgovarajućeg matematičkog modela (Jelaska, 2011).

Ovisnost izlaznih o ulaznim varijablama u dinamičkim sustavima koji opisuju stvarnosti u pojedinim znanstvenim istraživanjima u društveno-humanističkim znanostima uspostavlja se djelovanjem različitih fizikalnih zakonitosti. Pritom u ovisnosti o složenosti promatranog problema, tim znanstvenika odnosno eksperata u proučavanom području mora razložiti sustav na elementarne komponente u skladu s polaznim pretpostavkama i aproksimacijama te matematički modelirati zakonitosti koje određuju veze između ulaza i izlaza. Tako primjerice u kineziološkoj znanosti u polistrukturalnim i kompleksnim timskim sportovima je dodatno potrebno matematički formulirati višestruko interakcijske odnose između ulaznih i izlaznih varijabli (McGarry i sur. 2002; Jelaska, 2011).

Komponente dinamičkih sustava smatrat ćemo elementarnim kada se u okviru prihvaćenih pretpostavki i aproksimacija, ovisnost izlaza o ulazima može eksplicitno izraziti matematičkim formuliranjem zakonitosti kojima je ovisnost uvjetovana. Nadalje, u modeliranju kompleksne dinamike procesa u društvenim znanostima standardno se polazi od pretpostavke determiniranosti uzročno-posljedične veze između ulaznih i izlaznih varijabli. Pritom je čest zahtjev da promatrani objekti imaju svojstvo (vremenskog) kontinuuma odnosno da zadržavaju fizikalna svojstva unutar infinitezimalno malog funkcijskog pomaka. Pri generiranju modela koji opisuju dinamičke sustave u kineziološkim istraživanjima dotične pretpostavke se podrazumijevajum, ali se standardno uvodi i niz drugih pretpostavki i aproksimacija kojima se ostvaruje kompromis između točnosti i složenosti modela.

4. MATEMATIČKA INTERPRETACIJA PRIRODE DINAMIČKIH SUSTAVA U KINEZIOLOGIJI

U društvenim znanostima, a posebice u kineziologiji često kao produkt mjerenja imamo varijable diskretnog tipa. Obzirom da su većina varijabli kontinuirani objekti, u znanstvenim istraživanjima se standardno za pojedinu varijablu umjesto diskretnog skupa podataka koristi njena kontinuirana aproksimacija.

Kontinuiranu fizikalnu veličinu za koju vrijedi zakon sačuvanja (npr. masa, energija, količina gibanja,…) standardno ćemo označavati s G, količinu te veličine s Γ, a njen tok s γ. Promjena količine

Γ veličine G u nekom omeđenom djelu prostora kao spremniku uvjetovana je tokovima te veličine kroz granice koje prostor spremnika odvajaju od njegove okoline. U kineziološkoj znanstvenoj i stručnoj praksi pretpostavljamo da se oblik spremnika može mijenjati te da njegove granice mogu biti stvarne ili zamišljene. Nadalje, neposredni uzrok promjene količine Γ u spremniku je razlika ulaznih i izlaznih tokova veličine G kroz granice spremnika pri čemu je tok γ veličine G definiran količinom te veličine koja u jedinici vremena prođe kroz granicu spremnika. Proces akumulacije možemo promatrati kao komponentu nekog sustava pri čemu je razlika ukupnog ulaznog toka γ_u i ukupnog izlaznog toka γ_i, a izlaz je količina Γ kao posljedica. Pritom vrijedi tvrdnja da je razlika između količine veličine G koja u nekom intervalu vremena uđe u spremnik i količine koja u tom istom intervalu izađe jednaka promjeni količine Γ veličine G u spremniku. Stoga unutar infinitezimalnog vremenskog intervala *dt* imamo sljedeću jednadžbu:

$$\Gamma(t + dt) - \Gamma(t) = (\gamma_u - \gamma_i)dt \qquad (1)$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s dt njena lijeva strana prelazi u diferencijalni kvocijent odnosno u derivaciju funkcije $\Gamma(t)$ po vremenskoj varijabli. Shodno tome matematički model procesa akumulacije veličine G u spremniku ima oblik diferencijalne jednadžbe prvog reda u kojoj je vrijeme t nezavisna varijabla:

$$\frac{d\,\Gamma(t)}{dt} = \gamma_u(t) - \gamma_i(t) \qquad (2)$$

Po analogiji s fizikalnim značenjem prve derivacije pomaka po vremenu kao brzine gibanja, prvu derivaciju količine Γ na lijevoj strani jednadžbe (2) smatrat ćemo brzinom promjene količine Γ veličine G u spremniku. U skladu s time, brzina promjene količine akumulirane varijable u spremniku u svakom trenutku vremena je jednaka je trenutnoj razlici ulaznih i izlaznih tokova te varijable kroz granice spremnika.

Ako jednadžbu (2) integriramo po vremenskoj varijabli dobivamo:

$$\Gamma(t) = \int_{t_0}^{t} [\gamma_u(t) - \gamma_i(t)]dt + \Gamma(t_0) \qquad (3)$$

Uočavamo da stanje procesa akumulacije u trenutku t ne ovisi samo o intenzitetu ulaznih i izlaznih tokova u tom trenutku već je određeno i stanjem procesa akumulacije u nekom prethodnom trenutku t_0 te integralom funkcija po kojima se ulazni i izlazni tokovi mijenjaju u granicama od trenutka t_0 do promatranog do trenutka t. Izraz (3) upućuje na zaključak da se proces akumulacije može u općenitosti shvatiti kao realizacija matematičke operacije integriranja po vremenskoj varijabli. Stoga je proces akumulacije temeljni dinamički proces pa se može reći da je neki sustav dinamički ako se u njemu odvija najmanje jedan proces akumulacije. Matematički model opisan jednadžbom (2) je temeljno polazište u generiranju matematičkog modela bilo kojeg sustava u znanstvenim istraživanjima u općenitosti. S druge strane, potrebno je naglasiti da on tek iznimno predstavlja konačni oblik modela. Primjerice u polistrukturnim i kompleksnim sportskim aktivnostima, obzirom na složenost modela i višestruku povezanost varijabli ulazne varijable samo posredno određuju intenzitet izlaznih varijabli pa su potrebni dodatni mehanizmi opisivanja ovisnosti među varijablama.

5. ZAKLJUČAK

U ovom je radu istaknuta važnost upotrebe naprednih metodoloških alata u kineziološkoj znanstvenoj i stručnoj praksi, posebno zbog toga što se znanstvene analize temelje na interpretacijama rezultata dobivenih primjenom prikladnih statističkih i matematičkih modela. Zacijelo je jedna od budućih smjernica kineziološke znanstvene i stručne prakse intenzifikacija upotrebe matematičkog modeliranja i dinamičkih sustava, naročito stoga što kineziologija, utemeljena kao interdisciplinarna kvantitativno utemeljena znanost ima obvezu korištenja naprednih modela u znanstvenim istraživanjima. Navedeno se ističe posebice zbog činjenice da su često predmet modeliranja dinamičkih sustava u istraživanjima u kineziološkoj znanosti komponente većih (kaotičnih) sustava u kojima se uzročne veze između ulaza i izlaza ostvaruju multivarijatnim procesima unutar nekog konačnog prostora omeđenog realnim granicama. Ovaj rad bi trebao dati ključne smjernice za razumijevanje mehanizama koji su u pozadini praktične primjene matematičkog modeliranja adekvatnih problema, naročito kontrole dinamičkog procesa vježbanja u područjima edukacije, sporta, sportske rekreacije i kineziterapije.

6. LITERATURA

1. Barton, S. (1994). Chaos, self-organisation, and psychology. *American Psychologyst*, 49(1), 5-14.
2. Bertalanffy, L. (1968). *General System Theory*. New York: George Braziller.
3. Birkhoff, G.D. (1966). *Dynamical Systems*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
4. Hamill, J., van Emmerik, R., Heiderscheit, B. & Li, L. (1999). A dynamical systems approach to lower extremity running injuries. *Clinical Biomechanics*, 14, 297-308
5. Hughes, M.D. & Bartlett, R.M., (2002) The use of performance indicators in performance analysis. *Journal of Sport Sciences*, 20, 739-754.
6. Jelaska, I. (2011). Konstrukcija i aplikacija novog modela za evaluaciju uspješnosti u kompleksnim sportskim aktivnostima. *Doktorska disertacija*. Split: Kineziološki fakultet.
7. McGarry, T., Anderson, D.I., Wallace, S.A., Hughes, M.D. & Franks, I.M. (2002). Sport competition as a dynamical self-organizing system. *Journal of Sport Sciences* 20, 771-781.
8. Ott, E. (1993). *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press.